

臺中市立臺中第一高級中等學校 108 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學實作 試題卷

注意事項:本試題共 10 題填充題, 4 題作圖、計算與證明題。

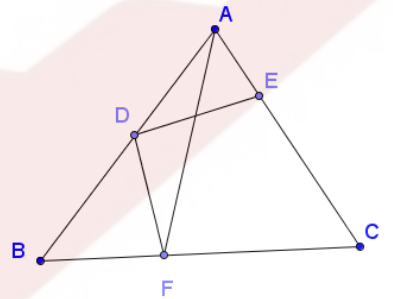
* 填充題須化到最簡形式, 再將答案填入答案卷的指定格內。

* 作圖、計算與證明題的演算過程或理由請於答案卷的指定格內詳述, 否則將予扣分甚至零分。

* 所給圖形未必精準, 僅供參考。

第一部分: 填充題(每題 6 分, 共 60 分)

1. 如圖, 已知一個 $\triangle ABC$, D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 邊上的點, 且 $\overline{DE} = \overline{DF}$, 若 $\angle DEC = 105^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle DFB = 80^\circ$, $\angle AFC = 75^\circ$, 試求 $\angle AFE =$ _____



2. 若 $S = 1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \dots + 99^{100} + 100^{101}$, 試求 S 最左邊的兩位數字 = _____

3. 已知 $(a + \sqrt{a^2 + 9})(b + \sqrt{b^2 + 16}) = 25$, 求 $a\sqrt{b^2 + 16} + b\sqrt{a^2 + 9} =$ _____

4. 遊戲廠商出了 7 款公仔, 編號 1~7, 已知 A、B、C 三人合計集滿了 7 款公仔, 且每人對於同款公仔不重複收集, 若 A、B 兩人所有的公仔是 1~4 號, 且三人都擁有 4 號公仔, 例如: A 擁有 1、2、3、4 號公仔; B 擁有 1、2、3、4、5 號公仔; C 擁有 4、5、6、7 號公仔, 以上視為一種公仔組合, 試問三個人所擁有的公仔組合有 _____ 種可能

5. 已知 $[x]$ 是不大於 x 的最大整數, 試求 $\left[\frac{2^2}{1}\right] + \left[\frac{3^2}{2}\right] + \left[\frac{4^2}{3}\right] + \dots + \left[\frac{108^2}{107}\right] =$ _____

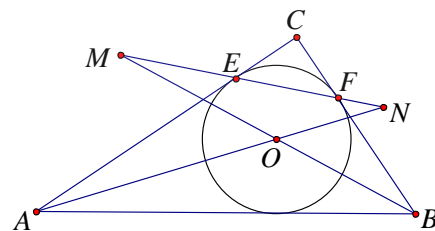
6. 已知 a 、 b 都是 2 位數，現定義 $a \otimes b$ 表示將 b 插入 a 的中間所形成的四位數，例如 $12 \otimes 34 = 1342$ ，若 $a \otimes b = 3 \times [b \otimes a] + 440$ ，試求 $a + b =$ _____

7. 設 a 為大於 18 之正整數，若 $2\sqrt{a+3} - \sqrt{a-18}$ 為 6 的倍數，則 $a =$ _____

8. 已知方程組 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{1+4x_1^2} = \frac{x_2}{4} \\ \frac{x_2^2}{1+4x_2^2} = \frac{x_3}{4} \\ \dots \\ \frac{x_{2018}^2}{1+4x_{2018}^2} = \frac{x_{2019}}{4} \\ \frac{x_{2019}^2}{1+4x_{2019}^2} = \frac{x_1}{4} \end{cases}$ ，求 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_{2018} + x_{2019} =$ _____

9. 三條線段能構成三角形的條件是：任意兩條線段長度的和大於第三條線段的長度。現有長為 233 cm 的鐵絲，要截成 n ($n > 2$) 小段，每段的長度不小於 1 cm。如果其中任意三小段都不能拼成三角形，則 n 的最大值為 _____

10. 如右圖在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，圓 O 是 $\triangle ABC$ 的內切圓，點 E 、 F 分別是 \overline{AC} 與 \overline{BC} 邊上的切點，若射線 \overline{AO} 與 \overline{BO} 分別交直線 \overline{EF} 於 N 、 M ，且 $\overline{AB} = 8$ ，試求 $\triangle OMN$ 面積為 _____

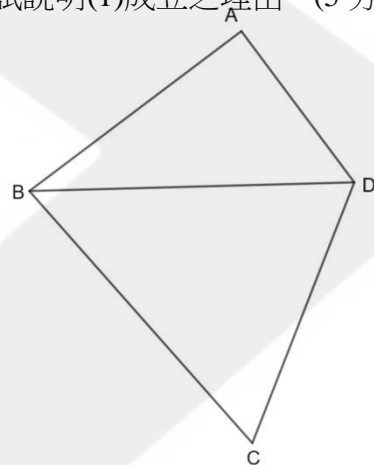


第二部分：作圖、計算與證明題(每題 10 分，共 40 分)

1. 87 號公車每天早上 6 點從總站發出第一班車，前往串公園，之後每隔 20 分鐘發出一班車，若每班公車的車速相同，從總站到串公園需要 1 小時，當公車到達串公園後，隨即按原速度原路線返回。今林柱與陳日均等速騎 ubike 出門，
- (1) 若林柱 8 點騎 ubike 從總站出發到串公園，需要騎 2 小時，其路線和 87 號公車的路線完全相同，問林柱離開總站後，在途中迎面一共遇到幾輛 87 號公車？有幾輛 87 號公車從他後面追過？（各 2 分）
 - (2) 早上 7 點，陳目騎 ubike 從串公園要到總站，路線也和 87 號公車路線相同，在途中迎面遇到 6 輛公車，且到達總站時，恰好有一輛 87 號公車從總站出發，試求：陳目從串公園到總站耗時多少小時？其在途中有幾輛 87 號公車從身後追過？（各 2 分）
 - (3) 陳目和林柱兩人在幾點幾分相遇？（2 分）

2. 一正方形 $ABCD$ ，邊長為 4，若 E 、 F 是 \overline{AD} 上的點，且 $\overline{AE} = \overline{FD}$ ， \overline{CF} 交 \overline{BD} 於 G ， \overline{AG} 交 \overline{BE} 於 H ，
- (1) 求證： $\overline{AG} \perp \overline{BE}$ （5 分）
 - (2) \overline{HD} 的最小值為何？（5 分）

3. 如圖，有一個對角線互相垂直的四邊形 $ABCD$ ，若 $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} : \overline{AD} = \sqrt{2} : 1$ ，(1) 試利用尺規作圖在 \overline{AB} 上找一點 P ， \overline{BC} 上找一點 Q ，使得直線 \overline{PQ} 同時將 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 的面積平分。（5 分） (2) 試說明(1)成立之理由。（5 分）



4. 已知 N 為正整數， a 、 b 、 c 、 d 為 N 的四個最小的相異正因數，若 $N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ，則 $N = \underline{\hspace{2cm}}$

試題結束

臺中市立臺中第一高級中等學校 108 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學實作 解答

第一部分：填充題(每題 6 分，共 60 分)

1	2	3	4
15°	10	$\frac{481}{50}$	500
5	6	7	8
5993	68 或 122	118	0 或 $\frac{1}{2}$
9	10		
11	$4\sqrt{3} - 4$		

第二部分：作圖、計算與證明題(每題 10 分，共 40 分)

1	<p>(1) 8 ; 2</p> <p>(2) $1\frac{1}{3}$; 0</p> <p>(3) 8 點 12 分</p>
2	<p>(1) 略</p> <p>(2) $2\sqrt{5}-2$</p>
3	<p>(1)略</p> <p>(2)略</p>
4	130