

107 年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

第壹部分：單選題、多選題及填充題共佔 50 分

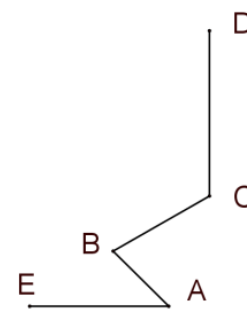
一、單選題:(共二題，每題 5 分，共 10 分)

說明:第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 如右圖(圖形不一定為實際大小)， $\angle EAB = \frac{\pi}{4}$ 、 $\angle ABC = \frac{5\pi}{12}$ 、 $\angle BCD = \frac{2\pi}{3}$ ，

且 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 6$ ，試求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 之值為下列哪一個選項?

- (A) $48\sqrt{2}$ (B) 24 (C) $14+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ (D) $24-4\sqrt{3}$ (E) 0



2. 設函數 $f(x) = M \sin(kx + \varphi)$ ($M \neq 0$ ， $k > 0$ ， $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的圖形關於直線 $x = \frac{2\pi}{3}$ 對稱，且它的週期是 π ，則下列

選項何者是正確的?

- (A) $f(x)$ 的最大值是 M 。
 (B) $f(x)$ 的圖形會通過點 $(0, \frac{1}{2})$ 。
 (C) $f(x)$ 在區間 $[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}]$ 上是遞減函數。
 (D) $f(x)$ 的一個對稱中心是 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 。
 (E) 以上選項皆不是

二、多選題:(共三題，每題 5 分，共 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 某班 30 位學生第二次段考數學科成績分別為 x_1, x_2, \dots, x_{30} ，已知 x_1, x_2, \dots, x_{30} 的算術平均數為 60 分、標準差為 10

分。若令函數 $f(x) = \sum_{k=1}^{30} (x - x_k)^2$ ， $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，請問下列哪一個選項是正確的?

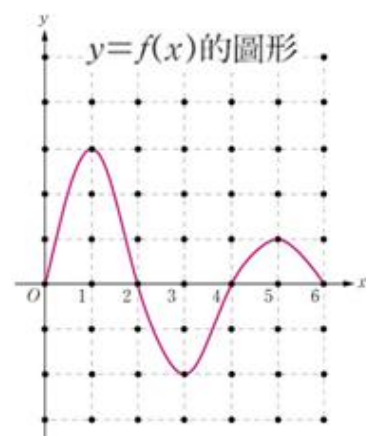
- (A) $f(60) = 3000$ (B) $\sum_{k=1}^{30} x_k^2 = 121000$ (C) $f(50) = 6000$ (D) $f(61) > f(60)$ (E) $f'(59) > 0$

107 年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

4. 右圖為多項式函數 $y=f(x)$ 在 $[0,6]$ 的圖形，且每個小格為邊長 1 的

正方形，設 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ ，試問下列敘述哪些是正確的？

- (A) 函數 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 有最大值。
- (B) 函數 $y=g(x)$ 在 $x=4$ 有極小值。
- (C) 函數 $y=g(x)$ 的圖形在區間 $(2,3)$ 上遞減。
- (D) 函數 $y=g(x)$ 的圖形在區間 $(2,3)$ 凹口向上。
- (E) 函數 $y=g(x)$ 的圖形有三個反曲點。



5. 已知複數 α, β 分別對應於複數平面的點 P, Q ，若 O 為原點，且 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ ，則下列哪些選項一定正確？

- (A) $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm \sqrt{3}i$ 。
- (B) 向量 \vec{OP} 是由向量 \vec{OQ} 繞原點順、逆時針方向旋轉 60° 而得。
- (C) $\vec{OP} = 2\vec{OQ}$ 。
- (D) $\triangle POQ$ 為一個 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形。
- (E) $\triangle POQ$ 為正三角形。

三、填充題:(共五題，每題 5 分，共 25 分)

說明：第 A 題至第 E 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

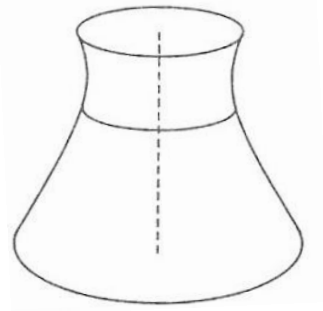
A. 甲、乙擲一個公正骰子各一次，在甲擲出點數比乙擲出點數大的條件下，甲、乙擲出點數和是 7 點的機率為_____。

B. 通過 $(0,0)$ 與 $(1,1)$ 二點的曲線 $y=f(x)$ 稱為羅倫茲曲線，而且其 G 係數 (Gini coefficient) 定義為

$$G = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx, \text{ 已知函數 } f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{3}x \text{ 為羅倫茲曲線，且其 G 係數為 } \frac{1}{3}, \text{ 求：數對 } (a, b) \text{ 為_____。}$$

107 年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

- C. 有一雙曲線型的花瓶，其側面是雙曲線的一部分繞其中心線旋轉所得的曲面，花瓶的最小半徑為 12 公分，上口半徑為 15 公分，下口半徑為 20 公分，高有 50 公分，如右圖，試求此雙曲線的正焦弦長為_____公分。



- D. 在銳角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{AC} = 11$ ，設 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心為 O ，半徑為 R_1 ， $\triangle OBC$ 的外接圓半徑為 R_2 ，若 $R_2 = 2R_1$ ，則 $R_1 =$ _____。

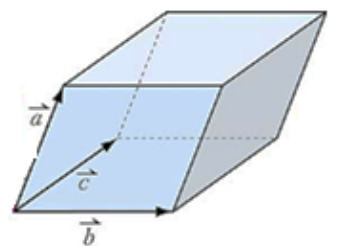
- E. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，令 $a_n = [\log n]$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，試求 $\sum_{n=1}^{2018} a_n$ 之值為_____。

第貳部分：非選擇題(數學寫作能力、計算證明題共占 50 分)

說明：本部份共有兩題數學寫作能力及五題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號(1、2)與子題號((1)、(2)、(3))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、數學寫作能力：(共二題，共計 12 分)

1. 設 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 為空間中不共平面的三個非零向量，試以 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 的外積與內積之運算表示所張平行六面體體積公式，並證明之。(6分)



2. 設 a 為非零實數，試就實數 r 討論：

- (1) 首項為 a ，公比為 r 的無窮等比數列的斂散性。若為收斂時，請分別寫出其收斂值。(3分)
- (2) 首項為 a ，公比為 r 的無窮等比級數的斂散性。若為收斂時，請分別寫出其收斂值。(3分)

107 年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

二、計算證明題：(共 5 題，共計 38 分)

1. 設實數 x 滿足不等式 $2^{1+2x} + 2^{1-2x} - 7(2^x + 2^{-x}) + 9 < 0$ ，求 $10^x + 10^{-x}$ 的範圍。(8 分)

2. 甲、乙兩位足球選手在 12 碼踢球進網的機率分別為 p 、 q 。今甲、乙兩人在 12 碼各踢一球，且兩人踢球進網是獨立事件，令隨機變數 X 表示兩人踢球進網的次數，求：

(1) X 的期望值。(4 分) (2) X 的標準差。(4 分)

3. 若過原點 $(0,0)$ 有三條直線會與 $y = x^3 + Px^2 + 1$ 相切，求 P 值的範圍。(6 分)

4. 設空間中，有兩相異直線 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{k} = \frac{z-1}{k}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{k} = \frac{4-5z}{25}$ 交於一點， $k \neq 0$ ，試回答以下問題：

(1) 求 k 之值。(3 分)

(2) 已知兩定點 $A(3,1,0)$ 和 $B(1,0,-1)$ ，請在 L_1 上找一點 P ，使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最小，求此最小值與此時 P 點座標。(5 分)

5. 現有甲乙兩個容器，甲內有 0.6L 的水，乙內有 0.4L 的水。將甲的水倒一半給乙，再將乙內一半的水倒給甲，此動作稱為一輪。若經 n 輪操作後，甲內有 a_n 的水，乙內有 b_n 的水。

(1) $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ ，求 $M = ?$ (3 分)

(2) 若令 $b_n = 1 - a_n$ ，請寫出 a_n 的遞迴式，並寫出 a_n 的一般式。(5 分)

試題結束